This question paper contains 15 printed pages]

DESHBANDHU COLLEGE LIBRARY ★ Kalkaji, New Delhi-19 ★

Roll No. | | | | | | | | | | | |

(1) 2019

S. No. of Question Paper : **2435**

Unique Paper Code : **12271101** **JC**

Name of the Paper : **Introductory Microeconomics**

Name of the Course : **B.A. (H.) Economics CBCS (OC) C-I, Core**

Semester : **I**

Duration : **3 Hours** Maximum Marks : **75**

(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

Note :— Answers may be written *either* in English *or* in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

टिप्पणी :—इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी **या** हिन्दी किसी एक भाषा में दीजिए; लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

Question No. **1** is compulsory.

Answer any *four* questions from question no. **2** to **7**.

All questions carry equal marks.

प्रश्न संख्या **1** अनिवार्य है।

प्रश्न संख्या 2 से 7 में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

P.T.O.

1. Answer any *five* : 5×3

(*i*) Two economies namely Economy A and Economy B can produce both the goods X and Y. However economy A is specialized in production of good X and economy B is specialized in production of good Y. Draw and explain the production possibility curves for both the economies.

(*ii*) Lalita consumes only two commodity X and Y. The price of X has increased but it is observed that Lalita is consuming the same amount of good X. Explain this condition using income effect and substitution effect.

(*iii*) Do you agree that price controls often hurts those for whom these were meant to help ? Discuss this in view of rent control.

(*iv*) Does a firm operating under perfectly competitive market always exit whenever it incurs losses in the short-run ?

(*v*) In a city there is only one company providing telecommunication service. The company is asked to set its price equal to its marginal cost. What problems will the company face in doing so ?

(*vi*) Does the doubling of wage rate cause demand for labour to be half ? Discuss.

किन्हीं **पाँच** का उत्तर दीजिए :

(*i*) दो अर्थव्यवस्था A और B, दो वस्तुओं X और Y का उत्पादन कर सकती हैं। हालाँकि अर्थव्यवस्था A वस्तु X के उत्पादन में दक्ष है और अर्थव्यवस्था B वस्तु Y के उत्पादन में दक्ष है। दोनों अर्थव्यवस्थाओं के लिए उत्पादन संभावना वक्र बनाइए और वर्णन कीजिए।

(ii) ललिता सिर्फ दो वस्तुएँ X और Y का उपभोग करती है। यह पाया गया कि वस्तु X की कीमत में वृद्धि हो जाने पर भी ललिता वस्तु X की पहले जितनी मात्रा का उपभोग अब भी कर रही है। आय एवं प्रतिस्थापन प्रभाव का उपयोग करते हुए इस अवस्था का वर्णन कीजिए।

(*iii*) क्या आप इस बात से सहमत हैं कि मूल्य नियंत्रण से उनका ही नुकसान होता है जिनके फायदे के लिए यह किया जाता है ? किराया नियंत्रण के सन्दर्भ में इसकी विवेचना कीजिए।

(*iv*) अल्पकाल में हानि की स्थिति होने पर क्या एक पूर्णतः प्रतियोगी फर्म हमेशा उद्योग छोड़ देगी ?

(*v*) एक शहर में टेलीकॉम सर्विस देने वाली सिर्फ एक ही कम्पनी है। इस कम्पनी को सीमान्त लागत के बराबर मूल्य रखने के लिए कहा गया है। ऐसा करने पर कम्पनी को किन समस्याओं का सामना करना पड़ेगा ?

(*vi*) मजदूरी दर को दुगुना कर देने पर क्या श्रम की माँग आधी हो जाएगी ? विवेचना कीजिए।

2. (*i*) What is the role of government in a modern economy ? 5

(*ii*) The demand and supply of labour in a village is given by :

$$D_L = 210 - 3W \text{ and } S_L = 2W.$$

Calculate the minimum wage (W_G) fixed by the government which causes an unemployment of 40. 5

(*iii*) Due to increase in income of residents of a city the demand for car rises. What happens to producer surplus in the market for car ? What happens to producer surplus in the market for tyres ? Use diagrams to explain. 5

(*i*) एक आधुनिक अर्थव्यवस्था में सरकार की क्या भूमिका होती है ?

(*ii*) एक गाँव में श्रम की माँग और पूर्ति फलन इस प्रकार है :

$$D_L = 210 - 3W \text{ एवं } S_L = 2W$$

सरकार द्वारा निर्धारित न्यूनतम मजदूरी दर (W_G) ज्ञात कीजिए जिसकी वजह से 40 श्रमिक बेरोजगार हो जाते हैं।

(*iii*) एक शहर के नागरिकों की आय में वृद्धि हो जाने की वजह से कार की माँग बढ़ जाती है। कार बाजार में उत्पादक अतिरेक पर क्या प्रभाव पड़ता है? टायर बाजार में उत्पादक अतिरेक पर क्या प्रभाव पड़ता है? समुचित चित्रों की सहायता से बताइए।

3. (*i*) Should a bumper crop due to favourable weather condition be a cause of concern for the farmers ? Explain. 6

(*ii*) Government imposes a tax on sale of foods served in a restaurant. Can the government ensure that the entire burden of this tax will be borne by the restaurant owner ? Discuss. 5

(*iii*) Studies indicate that the price elasticity of demand for milk in a particular village is –1.2. If a litre of milk currently priced at Rs. 30 and the government wants to increase milk consumption by 20%, by how much should it decrease the price of milk ? 4

(*i*) क्या अनुकूल मौसम की वजह से एक भरपूर फसल किसानों के लिए चिंता का एक कारण होना चाहिए? समझाइए।

(*ii*) एक भोजनालय में खाद्य पदार्थों की बिक्री पर सरकार द्वारा एक कर लगाया जाता है। क्या सरकार यह सुनिश्चित कर सकती है कि इस कर का सारा भार भोजनालय मालिक पर पड़े ? विश्लेषण कीजिए।

(*iii*) अध्ययन से यह पता चलता है कि एक गाँव में दुग्ध की माँग की कीमत लोच –1.2 है। दुग्ध की कीमत 30 रुपये प्रति लीटर है और यदि सरकार यह चाहती है कि दुग्ध का उपभोग 20% बढ़ जाए तो कीमत में कितनी कमी करनी चाहिए ?

4. (*i*) Explain using income and substitution effects, why Giffen goods have upward sloping demand curve ? 7

(*ii*) Use indifference curves to show how an individual decides to allocate her time between work and leisure. Will she necessarily work more if the wage rate rises ? 4

(iii) A consumer consumes two goods bread and rice. Measuring rice on Y-axis, the MRS of rice for bread is 0.5 at equilibrium. The market price of rice is Rs 20.

(a) What is the market price of bread ?

(b) Derive the equation of budget line. 2,2

(i) आय एवं प्रतिस्थापन प्रभाव का उपयोग करते हुए बताइए कि एक गिफन वस्तु की माँग रेखा आरोही क्यों होती है ?

(ii) तटस्थता वक्र की सहायता से बताइए कि एक व्यक्ति कार्य और खाली समय का बंटवारा किस प्रकार करता है? मजदूरी दर में वृद्धि होने पर क्या वह हमेशा अधिक कार्य करेगा ?

(iii) एक उपभोक्ता दो वस्तुएँ चावल और रोटी का उपभोग करता है। Y-अक्ष पर चावल की गणना करते हुए सन्तुलन की स्थिति में रोटी के लिए चावल की सीमान्त प्रतिस्थापन दर 0.5 है। चावल की कीमत 20 रुपये है। गणना कीजिए :

(a) रोटी की बाजार कीमत क्या है ?

(b) बजट रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

5. (i) In the long run there are five alternative technologies to produce a commodity. Explain the derivation of long run ATC curve. 5

(ii) The long run supply curve of a perfectly competitive industry is more elastic in the long run than the short run. Do you agree ? Give reason to your answer. 4

(iii) A farmer is in equilibrium when he produces 100 kg of potato. The total cost function is given as $C = 1000 + 10\ Q + 0.05\ Q^2$. The price of potato is Rs. 20 per kg in the market.

(a) Calculate MC and AVC, AFC and AC of the producing potato at equilibrium level.

(b) Calculate total profits of the farmer. 4,2

(i) दीर्घकाल में एक वस्तु को उत्पादित करने के लिए पाँच विभिन्न तकनीकें उपलब्ध हैं। दीर्घकालीन औसत लागत वक्र के निरूपण का वर्णन कीजिए।

(*ii*) एक पूर्ण प्रतियोगी उद्योग का दीर्घकालीन पूर्ति वक्र अल्पकालीन पूर्ति वक्र से अधिक लोचदार होता है। क्या आप इस कथन से सहमत हैं? अपने उत्तर में इसका कारण बताइए।

(*iii*) 100 किलोग्राम आलू का उत्पादन करने पर एक किसान संतुलन में होता है। कुल लागत फलन

$$C = 1000 + 10\ Q + 0.05\ Q^2$$

है और आलू की कीमत बाजार में ₹ 20 प्रति किलोग्राम है।

(*a*) आलू उत्पादन के संतुलन की स्थिति में सीमान्त लागत, औसत परिवर्तनशील लागत, औसत स्थिर लागत और औसत लागत ज्ञात कीजिए।

(*b*) किसान का कुल लाभ ज्ञात कीजिए।

6. (*i*) Explain the dead weight loss due to monopoly with the help of a diagram. Does perfect price discrimination by a monopolist increase total welfare in the market ? Explain. 4

(*ii*) A monopolist produces a commodity X at a constant average cost of Rs. 20 and faces the following demand function :

$$X = 200 - 5\ P$$

What is the equilibrium output and price and profit of this monopolist ? 3,2,2

(*iii*) To produce socially efficient quantity in monopoly, what should be done : per unit tax be levied or per unit subsidy be given ? 4

(*i*) एक चित्र की सहायता से एक एकाधिकार के कारण आर्थिक अतिरेक ह्रास का वर्णन कीजिए। क्या एक बाजार में एकाधिकारी द्वारा पूर्ण मूल्य विभेद करने पर कुल अतिरेक में वृद्धि होती है ? वर्णन कीजिये।

(*ii*) ₹ 20 की औसत लागत, जो कि स्थिर है, पर एक एकाधिकारी उत्पादन करता है और निम्नलिखित माँग वक्र का सामना करता है :

$$X = 200 - 5P$$

संतुलन की स्थिति में इस एकाधिकारी द्वारा उत्पादन की मात्रा, कीमत और लाभ कितना है ?

(*iii*) एकाधिकारी में सामाजिक लाभ अधिकतम स्तर पर रखने के लिए क्या करना चाहिए : प्रति इकाई कर लगाया जाये या प्रति इकाई अनुवृत्ति दी जाये ?

7. (*i*) In a perfectly competitive markets, explain why the value of marginal product of labour curve is the demand curve for labour. 5

(*ii*) According to new labour laws, firms are now required to give workers health insurance. How this law will affect employment and wages considering no change in labour supply ? 4

(*iii*) Suppose labour is the only input used by a competitive firm whose production function is as follows :

Units of labour	Total Product
0	0
1	8
2	15
3	21
4	25
5	28
6	28

(*a*) Each unit of output sells for ₹ 5, calculate the value of marginal product of each worker.

(*b*) Compute the demand schedule showing the number of workers hired for wages of ₹ 15, 20 and 30.

(*c*) What happens to this demand curve if the price of output rises from ₹. 5 to ₹ 10 per unit. 6

(i) एक पूर्ण प्रतियोगी बाजार में बताइए कि श्रम का सीमान्त उत्पादन मूल्य वक्र श्रम का माँग वक्र होता है।

(ii) एक नए नियम के अनुसार अब फर्म के लिए श्रमिकों को स्वास्थ्य बीमा देना आवश्यक है। यह माना जाये कि श्रम की पूर्ति वक्र में कोई परिवर्तन नहीं होने की स्थिति में इसका रोज़गार और मजदूरी दर पर क्या प्रभाव पड़ेगा ?

(iii) माना कि श्रम उत्पादन का एकमात्र साधन है और एक पूर्ण प्रतियोगी फर्म का उत्पादन फलन निम्न प्रकार से है :

श्रम की संख्या	कुल उत्पाद
0	0
1	8
2	15
3	21
4	25
5	28
6	28

(a) प्रति इकाई वस्तु की कीमत ₹ 5 है, प्रत्येक श्रमिक का सीमान्त उत्पाद मूल्य ज्ञात कीजिये।

(b) मजदूरी दर ₹ 15, 20 और 30 होने पर श्रमिकों की माँग की एक माँग सूची बनाइए, चित्र भी बनाइये।

(c) यदि वस्तु की कीमत ₹ 5 से बढ़ कर ₹ 10 हो जाती है, तो माँग वक्र पर क्या प्रभाव पड़ेगा ?

This question paper contains 16+3 printed pages]

Roll No. | | | | | | | | | | | |

S. No. of Question Paper : **2436**

(2) DESHBANDHU COLLEGE LIBRARY Kalkaji, New Delhi-19 2019

Unique Paper Code : **12271102** **JC**

Name of the Paper : **Mathematical Methods for Economics-I**

Name of the Course : **B.A. (Hons.) Economics—CBCS (OC)**

Semester : **I**

Duration : **3 Hours** Maximum Marks : **75**

(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

Note :— Answers may be written *either* in English *or* in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

टिप्पणी :—इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी **या** हिन्दी किसी एक भाषा में दीजिए; लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

There are *six* questions in all.

All questions are compulsory.

A simple calculator can be used.

कुल **छः** प्रश्न हैं।

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

साधारण कैल्कुलेटर का उपयोग किया जा सकता है।

1. Do any *two* of the following : 2×4=8

(*a*) Solve the following inequalities :

(*i*) $\left|\frac{3x-4}{2}\right| \leq \frac{5}{12}$

(*ii*) $ln(ln(e^x - 1)) < 0$.

(*b*) (*i*) The curve $y = x^2 + 4x$ is symmetric about the line $x = k$. Find k.

(*ii*) Find the domain for $f(x) = \frac{1}{\log(1-x)} + \sqrt{x+2}$

(*c*) Show graphically the regions in the (x, y) plane represented by the following sets :

$A = \{(x, y) : y \geq \frac{|x-1|}{x}, x > 0\}$

$B = [(x, y) : y \leq 21 - 18x - 3x^2]$

$C = A \cap B$.

निम्नलिखित में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिए :

(*a*) निम्नलिखित असमिकाओं (Inequalities) को हल कीजिए :

(*i*) $\left|\frac{3x-4}{2}\right| \leq \frac{5}{12}$

(*ii*) $ln(ln(e^x - 1)) < 0$.

(*b*) (*i*) वक्र $y = x^2 + 4x$, रेखा $x = k$ के आसपास सममित है। k को ज्ञात कीजिए।

(*ii*) x के वे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए :

$$f(x) = \frac{1}{\log(1-x)} + \sqrt{x+2}$$

(*c*) निम्नलिखित समुच्चयों द्वारा व्यक्त क्षेत्रों को आरेख की सहायता से दर्शाइए :

$A = \{(x, y) : y \geq \frac{|x-1|}{x}, x > 0\}$

$B = [(x, y) : y \leq 21 - 18x - 3x^2]$

$C = A \cap B$

2. Do any *four* of the following : 4×4=16

(*a*) Show that the inverse of the following function exists :

$$y = ab^x \ (a > 0, b > 1).$$

Find the inverse function $g(x)$. Find $g'(a)$ without finding the derivative of $g(x)$.

(*b*) Find the limits :

(*i*) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+3x^m}{1-x^n}\right) m, n > 0$

(*ii*) $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

(c) (i) Find an equation of the line tangent to the graph of $(x^2 + y^2)^3 = 8x^2y^2$ at the point $(-1, 1)$.

(ii) Given :

$$V = \pi r^2 h.$$

How is the proportional rate of increase in V related to the proportional rates of increase in r and h ? Assume h and r are functions of time.

(d) Determine whether the following converges or diverges. If it converges, find the limit :

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$

(ii) $(-1)^{n+1}\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(e) (i) Point P moves so that the difference of its distances from (3, 3) and (–3, –3) is always 6. Find the equation that the coordinates (x, y) of P must satisfy. What curve does it represent ?

(ii) Draw the graph of $y = e^{x-1} - 4$, using the graph of $y = e^x$.

निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** के उत्तर दीजिए :

(a) दर्शाइए कि निम्नलिखित फलन के प्रतिलोम फलन (Inverse function) का अस्तित्व है :

$$y = ab^x \ (a > 0, b > 1)$$

प्रतिलोम फलन $g(x)$ को ज्ञात कीजिए। $g(x)$ का अवकलज (derivative) ज्ञात किए बिना $g'(a)$ को ज्ञात कीजिए।

(b) सीमाओं को ज्ञात कीजिए :

(i) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+3x^m}{1-x^n}\right) m, n > 0$

(ii) $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

(c) (i) $(x^2 + y^2)^3 = 8x^2y^2$ के आरेख की बिन्दु $(-1, 1)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(ii) दिया हुआ है :

$$V = \pi r^2 h$$

V की आनुपातिक वृद्धि दर (Proportional rates of increase), r व h की आनुपातिक वृद्धि दरों से किस प्रकार सम्बन्धित है ? मान लीजिए कि h व r समय के फलन हैं।

(*d*) ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित अनुक्रम (Sequence) अभिसारी (Convergent) है या अपसारी (Divergent)। यदि यह अभिसारी है, तो इनकी सीमाएँ (Limits) भी ज्ञात कीजिए :

(*i*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$

(*ii*) $(-1)^{n+1}\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(*e*) (*i*) बिन्दु P इस प्रकार गति करता है कि (3, 3) व (–3, –3) से इसकी दूरियों का अन्तर हमेशा 6 होता है। P के निर्देशांकों (Coordinates) (x, y) द्वारा सन्तुष्ट किए जाने वाला समीकरण ज्ञात कीजिए। यह किस वक्र को निरूपित करता है ?

(*ii*) $y = e^x$ के आरेख की सहायता से $y = e^{x-1} - 4$ का आरेख बनाइए।

3. Do any *three* of the following : 3×5=15

(*a*) Find the elasticity of y w.r.t. x :

(*i*) $y = x^a e^{-b(x+c)}$

(*ii*) $y = x + \sqrt{xy}$

(*b*) (*i*) Verify the quadratic approximation :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 \text{ for } x = 0$$

Determine its accuracy for $|x| \leq 0.1$.

(*ii*) Show that the equation $x^3 + 3x + 1 = 0$ has exactly one real root.

(*c*) (*i*) Let f be defined by

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & x < 0 \\ 5x^2 - 3, & x > 2 \end{cases}$$

Define $f(x)$ as a linear function on [0, 2] so that f is continuous for all values of x.

(*ii*) Solve for x : $4^x - 4^{x-1} = 3^{x+1} - 3^x$.

(*d*) (*i*) Check for differentiability at $x = 0$ for the function $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

(*ii*) Examine the continuity for :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n},\ x > 0$$

Plot the graph.

निम्नलिखित में से किन्हीं **तीन** के उत्तर दीजिए :

(*a*) y की x के सापेक्ष लोच (Elasticity) ज्ञात कीजिए :

(*i*) $y = x^a\, e^{-b(x+c)}$

(*ii*) $y = x + \sqrt{xy}$

(*b*) (*i*) निम्नलिखित द्विघात सन्निकटन (Quadratic approximation) को सत्यापित (Verify) कीजिए :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 \qquad x = 0 \text{ हेतु}$$

$|x| \leq 0.1$ हेतु इसकी यथार्थता (accuracy) भी ज्ञात कीजिए।

(*ii*) दर्शाइए कि समीकरण $x^3 + 3x + 1 = 0$ का एक मूल (root) है।

(*c*) (*i*) मान लीजिए कि f

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & x < 0 \\ 5x^2 - 3, & x > 2 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। $f(x)$ को $[0, 2]$ पर एक ऐसे रेखीय (Linear) फलन के रूप में परिभाषित कीजिए कि f, x के सभी मानों हेतु संतत (Continuous) हो।

(*ii*) x हेतु हल कीजिए :

$$4^x - 4^{x-1} = 3^{x+1} - 3^x$$

(*d*) (*i*) फलन $f(x) = \sqrt[3]{x}$ की $x = 0$ पर अवकलनीयता (Differentiability) हेतु जाँच कीजिए।

(*ii*) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n},\ x > 0$ का सांतत्य (Continuity) हेतु परीक्षण कीजिए। आरेख बनाइए।

4. Do any *three* of the following : 3×5=15

(*a*) (*i*) The estimated value of a diamond bought for investment purposes is :

$$V = 250000(1.75)^{4\sqrt{t}}$$

If the rate of interest under continuous compounding is 7%, how long should the diamond be held ?

(*ii*) Consider two cashflows. For cashflow A, you receive Rs. 10 every year for 5 years with the first payment being today. For cashflow B, you receive Rs. x every year forever with the first payment being today. What is the value of x in order for cashflow B to have the same present value as cashflow A ?

(*b*) Given a logistic function describing the population growth over time, t :

$$f(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}$$

(*i*) What is the initial population ? At what rate is P(t) increasing at time $t = 0$?

(*ii*) What happens to the population over time ?

(*iii*) Find the point of time when the rate of growth of population starts declining.

(*c*) (*i*) Find all points (x, y) on the graph of $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 8$ where lines tangent to the graph at (x, y) have slope = – 1.

(*ii*) The function $f(x)$ is everywhere continuous and differentiable. Prove that if the function $f(x)$ has two real roots, then its derivative $f'(x)$ has at least one root.

(*d*) Find the inverse $g(x)$ of the following function :

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \le 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$$

Also find the domain of the inverse. Show graphically that $f(x)$ and $g(x)$ are symmetric about the line $y = x$.

निम्नलिखित में से किन्हीं **तीन** के उत्तर दीजिए :

(*a*) (*i*) निवेश के उद्देश्य से खरीदे गए एक हीरे का आकलित (Estimated) मूल्य $V = 250000(1.75)^{4\sqrt{t}}$ है। यदि सतत् चक्रवृद्धि (Continuously compounded) ब्याज दर 7% है, तो इस हीरे को कब तक रखा जाना चाहिए ?

(*ii*) दो नकदी प्रवाहों पर विचार कीजिए। नकदी प्रवाह A हेतु आपको 5 वर्ष तक प्रति वर्ष 10 रुपये मिलते हैं जिसमें प्रथम भुगतान आज मिलता है। नकदी प्रवाह B हेतु आपको हमेशा के लिए प्रति वर्ष x रुपये मिलते हैं जिसमें प्रथम भुगतान आज मिलता है। नकदी प्रवाह B का वर्तमान मान नकदी प्रवह A के वर्तमान मान के बराबर हो, इस हेतु x का मान क्या है ?

(*b*) समय t के साथ जनसंख्या वृद्धि को वर्णित करने वाले लॉजिस्टिक फलन :

$$f(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}$$

(*i*) प्रारम्भिक जनसंख्या क्या है ? समय $t = 0$ पर $P(t)$ किस दर से बढ़ रहा है ?

(*ii*) समय के साथ जनसंख्या पर क्या प्रभाव पड़ता है ?

(*iii*) हेतु समय का वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जहाँ जनसंख्या गिरना प्रारम्भ हो जाती है।

(*c*) (*i*) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 8$ के ग्राफ पर सभी बिन्दुओं (x, y) को खोजें जहाँ ग्राफ पर स्पर्श रेखा (x, y) में ढलान $= -1$ है।

(*ii*) फलन $f(x)$ हर जगह निरंतर और अवकलनीय है। साबित कीजिए कि यदि $f(x)$ में दो वास्तविक मूल (root) हैं, तो इसके व्युत्पन्न $f'(x)$ में कम से कम एक मूल (Root) है।

(*d*) प्रतिलोम फलन (Inverse function) $g(x)$ को व उसके परास को ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$$

आरेख की सहायता से दर्शाइए कि $f(x)$ व $g(x)$ रेखा $y = x$ के प्रति सममित (Symmetric) हैं।

5. Do any *three* of the following : 3×5=15

(*a*) Consider the function f defined by

$$f(x) = 4 - x + \log(x - 1), x > 1.$$

Determine where f is increasing and where f is decreasing. Does it have any global extreme points ?

(*b*) Given the function :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 8}{x^2 - 4}$$

(*i*) Find the asymptotes.

(*ii*) Find the possible local extremes

(*iii*) Find the intervals of concavity and convexity

(*iv*) Draw the graph.

(*c*) A tour service offers the following rates :

Rs. 1000 per person if 50 people (the minimum number to book the tour) go on the tour for every additional person, up to a maximum of 80 people total, everyone's charge is reduced by Rs. 10.

It costs 3000 (a fixed cost) plus Rs. 200 per person to conduct the tour.

How many people does it take to maximize the profit ?

(*d*) Given a demand curve $p = f(x)$ is convex from below i.e $\frac{d^2 p}{dx^2} > 0$.

The total revenue TR = px is defined in terms of x and the marginal revenue $MR = \frac{d(TR)}{dx}$.

Show that the MR curve is also convex from below if $\frac{d^3 p}{dx^3} > 0$ or if $\frac{d^3 p}{dx^3} < 0$ it is $\left|\frac{d^3 p}{dx^3}\right| < \left|\frac{3d^2 p}{x\, dx^2}\right|$.

निम्नलिखित में से किन्हीं **तीन** के उत्तर दीजिए :

(*a*) $f(x) = 4 - x + \log(x - 1), x > 1$ द्वारा परिभाषित फलन f पर विचार कीजिए। f कहाँ वर्द्धमान (Increasing) है व कहाँ ह्रसमान (Decreasing), ज्ञात कीजिए। क्या इसके कोई वैश्विक (Global) चरम बिन्दु (Extreme points) हैं ?

(*b*) फलन दिया है :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 8}{x^2 - 4}$$

(*i*) सभी सम्भव अनन्तस्पर्शियाँ (Asymptotes) ज्ञात कीजिए।

(*ii*) स्थानीय (Local) उच्चिष्ठों व स्थानीय निम्निष्ठों को भी ज्ञात कीजिए।

(*iii*) फलन कहाँ उत्तल (Convex) है तथा कहाँ अवतल (Concave) है।

(*iv*) आरेख बनाइए।

(*c*) एक यात्रा सेवा निम्नलिखित दरें देती है :

यदि 50 लोग (यात्रा को बुक करने हेतु न्यूनतम संख्या) यात्रा पर जाएँ तो 1000 रुपये प्रति व्यक्ति। प्रत्येक अतिरिक्त

व्यक्तिु हेतु (अधिकतम कुल 80 लोग तक) हर व्यक्ति का शुल्क 10 रुपये कम कर दिया जाएगा।

यात्रा करने में स्थिर लागत 3000 रुपये व प्रति व्यक्ति 200 रुपये अतिरिक्त लागत आती है।

कितने लोगों के यात्रा करने से लाभ अधिकतम होगा ?

(*d*) दिया हुआ मांग वक्र $p = f(x)$ नीचे से उत्तल (Convex) है अर्थात् $\frac{d^2p}{dx^2} > 0$ ।

कुल राजस्व (Total revenue) TR = px, x के पदों में परिभाषित है तथा सीमान्त राजस्व (Marginal revenue) $\text{MR} = \frac{d(\text{TR})}{dx}$ है।

दर्शाइए कि MR वक्र भी नीचे से उत्तल है, यदि $\frac{d^3p}{dx^3} > 0$ या यदि $\frac{d^3p}{dx^3} < 0$, यह $\left|\frac{d^3p}{dx^3}\right| < \left|\frac{3d^2p}{x\,dx^2}\right|$ होगा।

6. Do any *two* of the following : 2×3=6

(*a*) At a certain factory, the marginal cost is $3(q - 4)^2$ per unit when the level of production is q units. By how much will the total cost increase if the level of production is raised from 6 units to 10 units ?

(*b*) Find the area of the region enclosed by the graphs of $y = x^2$ and $y = 2 - x$.

(*c*) Given the demand and supply functions in a competitive market :

$$Q_t^d = 1200 - 6p_t \text{ and } Q_t^s = 2p_{t-1}$$

Find the equilibrium price and quantity in the market. What is the stability of the adjustment to a disturbance in the market ?

किन्हीं **दो** के उत्तर दीजिए :

(*a*) किसी कारखाने में जब उत्पादन का स्तर q इकाइयाँ है तो सीमान्त लागत $3(q - 4)^2$ प्रति इकाई होता है। यदि उत्पादन का स्तर 6 इकाइयों से बढ़कर 10 इकाइयाँ कर दिया जाता है तो कुल लागत कितनी बढ़ जाएगी ?

(*b*) $y = x^2$ व $y = 2 - x$ के आरेखों द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(*c*) एक प्रतिस्पर्द्धी (Competitive) बाजार में मांग व आपूर्ति फलन निम्न प्रकार हैं :

$$Q_t^d = 1200 - 6p_t \text{ व } Q_t^s = 2p_{t-1}$$

इस बाजार में सन्तुलन की अवस्था (Equilibrium) में कीमत व मात्रा ज्ञात कीजिए। बाजार में एक आघात (Disturbance) के परिणामस्वरूप समायोजन का स्थायित्व (Stability) क्या है ?

This question paper contains 8+4 printed pages]

Roll No. | | | | | | | | | | | |

S. No. of Question Paper : **3546** (3) 2019

Unique Paper Code : **12271101** **JC**

Name of the Paper : **Introductory Microeconomics**

Name of the Course : **B.A. (Honours) Economics**

Semester : **I**

DESHBANDHU COLLEGE LIBRARY Kalkaji, New Delhi-19

Duration : **3 Hours** Maximum Marks : **75**

(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

Note :— Answers may be written *either* in English *or* in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

टिप्पणी : इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेज़ी **या** हिन्दी किसी एक भाषा में दीजिए; लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

The question paper consists of **6** questions.

Attempt any *five* questions.

All questions carry equal marks.

Use of simple calculators is allowed.

इस प्रश्न-पत्र में **6** प्रश्न हैं।

किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

साधारण कैलकुलेटर का उपयोग किया जा सकता है।

P.T.O.

1. (*a*) Use the concept of the production possibilities frontier to explain the concept of an efficient outcome. Explain the difference between a straight line and a concave production possibilities frontier. 5

(*b*) Using indifference curves analysis, the impact of a change in price of a normal good on its consumption using substitution and income effects. 5

(*c*) Consider a non-linear demand curve, 5

$$Q^d = A \cdot (P^{-B})$$

Where A and B are positive constants.

(*i*) Show that the price elasticity of demand for this demand curve is (–B) at all points on the demand curve.

(*ii*) Write the equation of the total expenditure curve.

(*iii*) Suppose B = 2. Will the total expenditure rise when price increases ?

(*a*) उत्पादन सम्भाव्यता वक्र (production possibility frontier) की सहायता से कुशलता (efficiency) की अवधारणा को समझाइए। सरल रेखीय (straight line) व अवतल (concave) उत्पादन सम्भाव्यता वक्रों के मध्य अन्तर को समझाइए।

(*b*) अनधिमान वक्र विश्लेषण (indifference curve analysis) की सहायता से कीमत परिवर्तन के परिणामस्वरूप होने वाले प्रतिस्थापन व आय प्रभावों (substitution and income effects) को समझाइए।

(*c*) निम्नलिखित अरैखिक माँग वक्र पर विचार कीजिए,

$$Q^d = A \cdot (P^{-B})$$

जहाँ A व B धनात्मक स्थिरांक हैं।

(*i*) दर्शाइए कि इस माँग वक्र के सभी बिन्दुओं पर माँग की कीमत लोच (price elasticity of demand) (–B) है।

(*ii*) कुल व्यय वक्र (total expenditure curve) का समीकरण लिखिए।

(*iii*) मान लीजिए कि B = 2। क्या कीमत में वृद्धि के परिणामस्वरूप व्यय में वृद्धि होगी ?

2. (*a*) Discuss the effects of a price floor imposed by the government in the labor market. 5

(*b*) If the world price of a good exceeds the domestic price of the good, will the country export or import the good ? In this case, who gains from trade — domestic consumers or producers or both ? 5

(c) Explain how and why a per unit tax creates dead weight losses in the market. Can the dead weight losses be avoided if the consumers and producers voluntarily donate the tax amount and the government repeals the tax in the market ? 5

(a) श्रम बाजार में कीमत की न्यूनतम सीमा (price floor) लागू किए जाने के परिणामस्वरूप अल्पकाल (short run) व दीर्घकाल (long run) में होने वाले आर्थिक व सामाजिक प्रभावों का विवेचन कीजिए।

(b) यदि किसी वस्तु की वैश्विक कीमत उसकी घरेलू कीमत से अधिक है, तो उस देश को उस वस्तु का निर्यात करना चाहिए या आयात ? इस स्थिति में व्यापार से किसे लाभ होता है – घरेलू उपभोक्ताओं को या उत्पादकों को या दोनों को ?

(c) समझाइए कि किस प्रकार प्रति इकाई कर के परिणामस्वरूप बाजार में कुल भार नुकसान (dead weight loss) उत्पन्न होता है। यदि सरकार इस कर को हटा दे और उपभोक्ता व उत्पादक स्वेच्छा से कर की राशि को दान कर दें तो क्या कुल भार नुकसान को टाला जा सकता है ?

3. (a) The recent drone attacks on Saudi Arabia destroyed oil facilities and the country's crude oil production is expected to reduce significantly in the short run. Discuss the impact

of drone strikes on the petrol market in the world and subsequently the used car market. 5

(b) How and why does a firm's average total cost curve differ in the short run and the long run ? 5

(c) Calculate the income elasticity of demand of good X from the following data. Hence, conclude whether X is an inferior or normal good. 5

PRICE OF GOOD X (Rs.)	QUANTITY OF GOOD X	INCOME OF THE CONSUMER
10	50	100
20	40	200
10	20	400

(a) सऊदी अरब में हाल ही में हुए ड्रोन हमलों ने वहाँ के तेल के कुओं को नष्ट कर दिया है जिसके परिणामस्वरूप वहाँ के कच्चे तेल के उत्पादन में अल्पकाल में काफी कमी होने की सम्भावना है। इन ड्रोन हमलों के परिणामस्वरूप विश्व में पेट्रोल बाजार व तदनन्तर उपयोग की हुई कारों के बाजार पर होने वाले प्रभावों का विवेचन कीजिए।

(b) फर्म के अल्पकालीन व दीर्घकालीन औसत कुल लागत वक्र किस प्रकार अलग होते हैं व क्यों ?

(*c*) निम्नलिखित आँकड़ों की सहायता से वस्तु X की माँग की आय लोच की गणना कीजिए। इससे निष्कर्ष निकालिए कि क्या वस्तु X एक हीन (inferior) वस्तु है या सामान्य (normal) वस्तु है।

वस्तु X की कीमत (रु.)	वस्तु X की मात्रा	उपभोक्ता की आय
10	50	100
20	40	200
10	20	400

4. (*a*) A country levies a 3% digital tax on the revenues earned by a local internet search engine company. The company responds by reducing the hourly wage rate of all its employees. Using indifference curve analysis, show how the workers may respond to reduction in their wage rate. Will your analysis depend on whether leisure is normal or inferior ? 7

(*b*) The demand curve for Metro rides for a female employee Vidhi is given by : 8

$$P = 50 - \frac{1}{3}Q$$

Where Q is the number of metro rides she takes per month and P is the cost of the metro ticket.

(*i*) Suppose the supply of metro services she avails is perfectly elastic at Rupees 30 per ride between two destinations. Find the equilibrium number of rides taken by Vidhi per month and the consumer surplus enjoyed by her.

(*ii*) The government proposes to make metro rides free for all women. Calculate the new equilibrium rides and the consumer surplus she now enjoys.

(*iii*) If Rupees 30 represents the total cost per ride to the supplier of metro services, do you think the extra trips Vidhi takes is economically justified ?

(*a*) एक देश एक स्थानीय इण्टरनेट सर्च इंजन द्वारा कमाए गए राजस्व पर 3% का डिजिटल कर लगा देता है। इसके प्रत्युत्तर में कम्पनी अपने सभी कर्मचारियों की प्रति घण्टा मजदूरी को कम कर देती है। अनधिमान वक्र विश्लेषण की सहायता से दर्शाइए कि कर्मचारी अपनी मजदूरी दर में कमी का किस प्रकार प्रत्युत्तर दे सकते हैं। क्या आपका विश्लेषण इस बात पर निर्भर करता है कि आराम (leisure) सामान्य है अथवा हीन ?

(*b*) एक महिला कर्मचारी विधि द्वारा मैट्रो से की जाने वाली यात्राओं हेतु माँग वक्र निम्न प्रकार है :

$$P = 50 - \frac{1}{3}Q$$

जहाँ Q उसके द्वारा प्रति माह मैट्रो से की जाने वाली यात्राओं की संख्या है तथा P मैट्रो के टिकट की कीमत है।

(*i*) मान लीजिए कि उसके द्वारा मैट्रो से की जाने वाली यात्राओं की संख्या 30 रुपए प्रति यात्रा पर पूर्णत: लचीली (perfectly elastic) है। सन्तुलन की अवस्था में विधि द्वारा प्रति माह की जाने वाली यात्राओं की संख्या तथा उसके उपभोक्ता अधिशेष (consumer surplus) को ज्ञात कीजिए।

(*ii*) सरकार मैट्रो की यात्राओं को सभी महिलाओं हेतु मुफ्त करने का प्रस्ताव देती है। नई सन्तुलन अवस्था में यात्राओं की संख्या तथा उपभोक्ता अधिशेष ज्ञात कीजिए।

(*iii*) यदि मैट्रो सेवा प्रदाता हेतु कुल लागत 30 रुपए प्रति यात्रा है, तो क्या आपको लगता है कि विधि द्वारा की जाने वाली अतिरिक्त यात्राएँ आर्थिक रूप से युक्तिसंगत (economically justified) हैं ?

5. (*a*) Define price discrimination. Can perfect price discrimination remove the dead weight loss associated with a monopoly ? 4

(*b*) Why do competitive firms stay in business if they make zero profits ? Explain. 4

(*c*) Consider two countries Japan and Australia producing two goods T-shirts and brownies. Each country has one million workers. The following table gives the production of two goods per worker per day in each country : 7

	T-SHIRTS	**BROWNIES [IN DOZENS]**
JAPAN	10	18
AUSTRALIA	10	10

(*i*) Which country has absolute advantage in producing brownies ?

(*ii*) Draw the production possibility frontier of both countries.

(*iii*) By calculating opportunity cost, find which country has comparative advantage in T-shirts and brownie production ?

(*iv*) What should be the pattern of trade ?

(*a*) कीमत विभेद्र (price discrimination) को परिभाषित कीजिए। क्या पूर्ण कीमत विभेद (perfect price discrimination) एकाधिकार (monopoly) से सम्बन्धित कुल भार हानि को दूर कर देता है ?

(*b*) पूर्ण प्रतिस्पर्धी फर्में व्यवसाय में क्यों बनी रहती हैं यदि वे शून्य लाभ कमाती हैं ? समझाइए।

(*c*) दो वस्तुएँ, टी-शर्ट व ब्राउनी बनाने वाले दो देशों जापान व ऑस्ट्रेलिया पर विचार कीजिए। निम्नलिखित सारणी में प्रत्येक देश में इन वस्तुओं का प्रति श्रमिक प्रतिदिन उत्पादन दिया हुआ है :

	टी-शर्ट	ब्राउनी [दर्जन में]
जापान	10	18
ऑस्ट्रेलिया	10	10

(*i*) ब्राउनी के उत्पादन में किस देश के पास निरपेक्ष लाभ (absolute advantage) है ?

(*ii*) दोनों देशों के उत्पादन सम्भाव्यता वक्रों को आरेखित कीजिए।

(*iii*) अवसर लागत (opportunity cost) की गणना करके ज्ञात कीजिए कि टी-शर्ट व ब्राउनी के उत्पादन में तुलनात्मक लाभ (comparative advantage) किस-किस देश के पास है ?

(*iv*) व्यापार का स्वरूप (pattern of trade) क्या होना चाहिए ?

6. (*a*) Derive the demand curve for labour in the competitive market. What causes the labour demand curve to shift ? Explain. 5

(*b*) Why is a monopolist's marginal revenue less than the price of its goods ? Show the profit maximizing level of output and price for a monopolist. 5

(*c*) Consider variable cost for a competitive firm in the following table : 5

Quantity	0	1	2	3	4	5	6
TVC [Rs.]	0	5	9	14	20	28	38

If the total fixed cost of the firm is Rs. 12 and price of output is Rs. 7, how many units of output will this firm produce ? What is total revenue and total cost ? Will the firm operate or shut down in the short run? Briefly explain.

(*a*) प्रतिस्पर्धी (competitive) बाजार में श्रम के माँग वक्र को व्युत्पन्न कीजिए। श्रम का माँग वक्र किसके कारण स्थानान्तरित (shift) होता है ? समझाइए।

(*b*) एकाधिकारी का सीमान्त राजस्व उसकी वस्तुओं की कीमत से कम क्यों होता है ? एकाधिकारी के उत्पाद का लाभ अधिकतम करने वाला स्तर व कीमत दर्शाइए।

(*c*) एक प्रतिस्पर्धी फर्म हेतु निम्नलिखित सारणी में दी गई कुल स्थिर (fixed) लागत व कुल चर (variable) लागत पर विचार कीजिए :

मात्रा	0	1	2	3	4	5	6
कुल चर लागत (रु. में)	0	5	9	14	20	28	38

यदि कुल स्थिर लागत 12 रुपये तथा उत्पाद की कीमत 7 रुपये है, तो फर्म उत्पाद की कितनी इकाइयों का उत्पादन करेगी ? कुल राजस्व व कुल लागत क्या है ? अल्पकाल में क्या फर्म चलेगी या बन्द हो जाएगी ? संक्षेप में समझाइए।

This question paper contains 19 printed pages]

Roll No. | | | | | | | | | | | |

DESHBANDHU COLLEGE LIBRARY Kalkaji, New Delhi-19 JC

(4) 2019

S. No. of Question Paper : **3547**

Unique Paper Code : **12271102**

Name of the Paper : **Mathematical Methods for Economics—I**

Name of the Course : **B.A. (Hons.) Economics**

Semester : **I**

Duration : **3 Hours** Maximum Marks : **75**

(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

Note :— Answers may be written *either* in English *or* in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

टिप्पणी :—इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी **या** हिन्दी किसी एक भाषा में दीजिए; लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

There are *five* questions in all.

All questions are compulsory.

A simple calculator can be used.

कुल **पाँच** प्रश्न हैं।

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

साधारण कैलकुलेटर का उपयोग किया जा सकता है।

1. Answer any *two* of the following : $2 \times 4 = 8$

(A) Let $f(x)$ be a function with domain [–2, 3] and range [0, 8]. What are the domains and ranges of the following functions ?

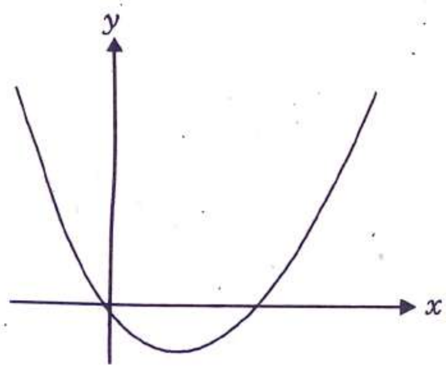
(*i*) $-f(-x-1)$

(*ii*) $4\, f^{-1}(-x) + 1$.

(B) The given figure shows the graph of the function :

$$y = g(x) = px^2 + qx + r.$$

(*i*) Check which of the constants p, q and r are > 0, $= 0$, or < 0.



$y = g(x) = px^2 + qx + r$

(*ii*) The graph is symmetric about the line $x = k$. Find k.

(C) Determine the direction of logical conclusion ($P \to Q$ or $Q \to P$ or $P \leftrightarrow Q$) in case of the following propositions :

(*i*) P : The series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent.

Q : $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(*ii*) P : $x^2 > 16$

Q : $x > 4$

निम्नलिखित में से किन्हीं **दो** के उत्तर दीजिए :

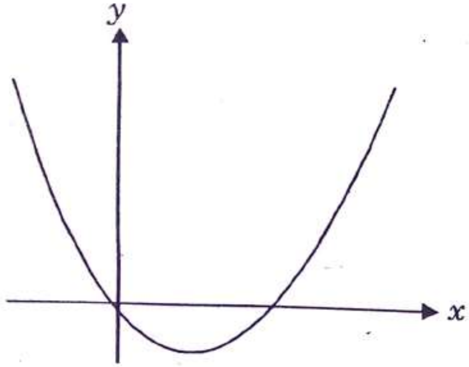
(A) मान लीजिए कि $f(x)$, परास (domain) [–2, 3] व परिसर (range) [0, 8] वाला एक फलन है। निम्नलिखित फलनों के क्या परास व परिसर हैं ?

(*i*) $-f(-x-1)$

(*ii*) $4\, f^{-1}(-x) + 1$.

(B) निम्नलिखित चित्र फलन $y = g(x) = px^2 + qx + r$ का आरेख दर्शाता है :

(*i*) जाँच कीजिए कि स्थिरांकों p, q व r में से कौन-कौनसे > 0, $= 0$ व < 0 हैं।



$$y = g(x) = px^2 + qx + r$$

(*ii*) यह आरेख रेखा $x = k$ के प्रति सममित (symmetric) है। k का मान ज्ञात कीजिए।

(C) निम्नलिखित कथनों हेतु तार्किक निष्कर्ष (logical conclusion) की दिशा ($P \to Q$ या $Q \to P$ या $P \leftrightarrow Q$) ज्ञात कीजिए :

(*i*) P : श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ अभिसारी (convergent) है।

Q : $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(*ii*) P : $x^2 > 16$

Q : $x > 4$

2. Answer any *three* of the following : $3\times4=12$

(A) Find the equations of the tangent lines to the curve $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ parallel to the line $x - 2y = 2$.

(B) Find the asymptotes of the following functions :

(*i*) $y = e^{\frac{1}{1+x}}$

(*ii*) $y = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x-1}$.

(C) (*i*) Evaluate the following limit $\lim_{x\to0} \dfrac{e^{x+1} - e^{x-1}}{x^2}$.

(*ii*) Consider the infinite series $1+\left(\dfrac{2x}{3}\right)+\left(\dfrac{2x}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2x}{3}\right)^3+\ldots$ .For what values of x does the series converge ? Find the sum of the series if $x = 1.2$.

(D) Approximate the function $f(x) = x^{1/3}$ by a Taylor polynomial of degree 2 at $x_0 = 8$. Use it to find an approximate value of $9^{1/3}$. Find an upper bound for the error of approximation corresponding to the result obtained.

निम्नलिखित में से किन्हीं **तीन** के उत्तर दीजिए :

(A) वक्र $y = \frac{x-1}{x+1}$ की रेखा $x - 2y = 2$ के समानान्तर (parallel) स्पर्श रेखाओं (tangents) के समीकरण ज्ञात कीजिए।

(B) निम्नलिखित फलनों की अनन्तस्पर्शियाँ (asymptotes) ज्ञात कीजिए :

(*i*) $y = e^{\frac{1}{1+x}}$

(*ii*) $y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x-1}$.

(C) (*i*) सीमा $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x+1} - e^{x-1}}{x^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(*ii*) अनन्त श्रेणी $1 + \left(\frac{2x}{3}\right) + \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + \left(\frac{2x}{3}\right)^3 + \ldots$ पर विचार कीजिए। x के किन मानों हेतु यह श्रेणी अभिसृत (converge) होती है ? यदि $x = 1.2$ हो तो श्रेणी का योगफल ज्ञात कीजिए।

(D) फलन $f(x) = x^{1/3}$ को $x_0 = 8$ पर कोटि (degree) 2 के टेलर बहुपद (Taylor polynomial) से सन्निकटित (approximate) कीजिए। इसकी सहायता से $9^{1/3}$ का सन्निकट मान (approximate value) ज्ञात कीजिए। प्राप्त परिणाम के संगत सन्निकटन त्रुटि (error of approximation) हेतु ऊपरी सीमा (upper bond) ज्ञात कीजिए।

3. Answer any *four* of the following : 4×5=20

(A) Graph the function $g(x)$ and check its continuity at $x = 1$ and $x = -1$.

$$g(x) = \begin{cases} 2x-1 \text{ if } x < -1 \\ x^2+1 \text{ if } -1 \le x \le 1 \\ x+1 \text{ if } x > 1 \end{cases}.$$

(B) (*i*) If $y\sqrt{x^2+1} = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ show that :

(*a*) $(x^2+1)\frac{dy}{dx} + xy - 1 = 0$

(*b*) $(x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + y = 0$

(*ii*) Find the point(s) of inflection of the function $f(x) = xe^{-x}$.

(C) (*i*) Let f be twice differentiable on $[0, 2]$, show that if $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, then there is an $x_0 \in (0, 2)$ such that $f''(x) = 0$.

(*ii*) Graph the function $y = |x^2 - 1|$.

(D) (*i*) Find the expression for elasticity of $h(x) = f(x)^{g(x)}$ in terms of E_f and E_g, the elasticities of $f(x)$ and $g(x)$ w.r.t x respectively.

(*ii*) Prove that $f(x)=e^{\sqrt{x}}-3$ has a unique solution in the interval (1, 4).

(E) (*a*) Suppose that the interest rate 'r' such that the present value of receiving Rs. A_2 in t_2 years from now is the same as receiving Rs. A_1 in t_1 years from now, given that $t_2 > t_1$. Assuming interest is compounded annually :

(*i*) Show that $A_2 > A_1$

(*ii*) Show that the present value of receiving Rs. A_2, $(t_2 + k)$ years from now is equal to the present value of receiving Rs. A_1, $(t_1 + k)$ years from now.

(*b*) The equation $3xe^{xy^2}-2y=3x^2+y^2$ defines y as a differentiable function of x about the point $(x, y) = (1, 0)$. What is the linear approximation to y about x?

निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** के उत्तर दीजिए :

(A) फलन $g(x)$ का आरेख बनाइए तथा इसकी $x = 1$ $x = -1$ पर सांतत्य (continuity) हेतु जाँच कीजिए :

$$g(x)=\begin{cases}2x-1 \text{ if } x<-1\\ x^2+1 \text{ if } -1\le x\le 1\\ x+1 \text{ if } x>1\end{cases}.$$

(B) (*i*) यदि $y\sqrt{x^2+1}=\log(x+\sqrt{x^2+1})$, हो, तो दर्शाइए कि :

(*a*) $(x^2+1)\dfrac{dy}{dx}+xy-1=0$

(*b*) $(x^2+1)\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x\dfrac{dy}{dx}+y=0$

(*ii*) फलन $f(x)=xe^{-x}$. के मोड़ बिन्दुओं (points of inflection) को ज्ञात कीजिए।

(C) (*i*) मान लीजिए कि f [0, 2] पर दो बार अवकलनीय (differentiable) है। दर्शाइए कि यदि $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, तो एक ऐसा $x_0 \in (0, 2)$ है जिसके लिए $f''(x) = 0$ ।

(*ii*) फलन $y = |x^2 - 1|$ का आरेख बनाइए।

(D) (*i*) $h(x) = f(x)^{g(x)}$ की लोच (elasticity) हेतु $f(x)$ व $g(x)$ की x के सापेक्ष लोचों, क्रमशः E_f व E_g, के पदों में व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए।

(*ii*) सिद्ध कीजिए कि $f(x) = e^{\sqrt{x}} - 3$ का अन्तराल (1, 4) में एक अद्वितीय (unique) हल है।

(E) (*a*) मान लीजिए कि '*r*' वह ब्याज दर है जिस पर अब से t_2 वर्षों में प्राप्त होने वाली A_2 रु. की राशि का वर्तमान मूल्य (present value) अब से t_1 वर्षों में प्राप्त होने वाली A_1 रु. की राशि के वर्तमान मूल्य के बराबर है, जहाँ $t_2 > t_1$ यह मानते हुए कि ब्याज में वार्षिक चक्रवृद्धि (Compounded annually) होती है :

(*i*) दर्शाइए कि $A_2 > A_1$

(*ii*) दर्शाइए कि अब से $(t_2 + k)$ वर्षों में प्राप्त होने वाले A_2 रु. का वर्तमान मूल्य अब से $(t_1 + k)$ वर्षों में प्राप्त होने वाले A_1 रु. के वर्तमान मूल्य के बराबर होगा।

(*b*) समीकरण $3xe^{xy^2} - 2y = 3x^2 + y^2$, y को बिन्दु $(x, y) = (1, 0)$ के आस-पास x के अवकलनीय फलन के रूप में परिभाषित करता है। y का x के आस-पास रेखीय सन्निकटन (linear approximation) क्या है ?

4. Answer any *two* of the following : $2 \times 7.5 = 15$

(A) (*i*) For $f(x) = 3x(x + 4)^{2/3}$ find the global extreme points on the interval $[-5, -1]$.

(*ii*) If f is a one-to-one twice differentiable function with inverse g, show that $g''(x) = -\dfrac{f''(g(x))}{(f'(g(x)))^3}$.

Show that if f is increasing and concave its inverse is convex.

(B) (*i*) Show that the function $f(x) = ax^2 + bx + c$ is concave if $a \le 0$ and convex if $a \ge 0$ without using derivatives.

(*ii*) Let $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{4 + e^{3x}}$. Find the intervals on which the function is increasing and/or decreasing.

(C) (*i*) The curve C_1 passes through the origin in the x-y plane and its gradient is given by $\frac{dy}{dx} = x(1-x^2)e^{-x^2}$. Find its stationary points and classify them as maximum or minimum points.

(*ii*) A coin and stamp dealer estimates that the value of V(t) of his collection (in lakhs of rupees) increases over time according to the following function $V(t) = 1000e^{\sqrt{\frac{t}{4}}}$. If rate of interest is 8% compounded annually, find optimal time t^* for the coin and stamp dealer to sell his collection such that the present value of the collection is maximised (second order condition for optimum need not be verified). How does a change in the discount rate change the optimal time t^* ?

निम्नलिखित में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिए :

(A) (*i*) $f(x) = 3x(x+4)^{2/3}$ हेतु अन्तराल [–5, –1] में वैश्विक (global) चरम बिन्दु (extreme points) ज्ञात कीजिए।

(*ii*) यदि f एक-से-एक (one-to-one), दो बार अवकलनीय फलन है जिसका प्रतिलोम (inverse) g है, तो दर्शाइए कि $g''(x) = -\frac{f''(g(x))}{(f'(g(x)))^3}$ ।

दशाईए कि यदि f वर्द्धमान (increasing) तथा अवतल (concave) है तो इसका प्रतिलोम उत्तल (convex) है।

(B) (*i*) बिना अवकलजों की सहायता के दर्शाइए कि फलन $f(x) = ax^2 + bx + c$ अवतल है यदि $a \le 0$ तथा उत्तल है यदि $a \ge 0$.

(*ii*) मान लीजिए कि $f(x) = \frac{e^{2x}}{4+e^{3x}}$ । वे अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें यह फलन वर्द्धमान (increasing) तथा/अथवा ह्रासमान (decreasing) है।

(C) (*i*) वक्र C_1 x-y समतल में मूल बिन्दु (origin) से गुजरता है तथा इसका ढाल (gradient) $\frac{dy}{dx} = x(1-x^2)e^{-x^2}$ है।

इसके स्थिर बिन्दुओं (stationary points) को ज्ञात कीजिए तथा उन्हें उच्चिष्ठ (maximum) या निम्निष्ठ (minimum) के रूप में वर्गीकृत कीजिए।

(*ii*) सिक्कों व डाक टिकटों के एक व्यापारी का आकलन है कि उसके संग्रह का मूल्य V(*t*) (लाख रुपयों में) समय के साथ फलन $V(t) = 1000e^{\sqrt{\frac{t}{4}}}$ के अनुसार बढ़ता है। यदि ब्याज दर 8% है, वार्षिक चक्रवृद्धि के साथ, तो इस व्यापारी के लिए अपने संग्रह को बेचने का इष्टतम (optimal) समय t^* ज्ञात कीजिए जिस पर इसके संग्रह का वर्तमान मूल्य अधिकतम हो (इष्टतम हेतु द्वितीय क्रम की शर्त को सत्यापित करने की आवश्यकता नहीं है)। बट्टे की दर (discount rate) में परिवर्तन इष्टतम समय t^* को किस प्रकार परिवर्तित करता है ?

5. Answer any *four* of the following : 4×5=20

(A) (*i*) Show that for any *two* $n \times n$ matrices A and B, tr(AB) = tr(BA), where tr(A) denotes the trace of a $n \times n$ matrix A.

(*ii*) Find the rank of the following matrix for all values of the parameter λ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7-\lambda \\ 2 & \lambda & -6 \end{pmatrix}.$$

(B) (*i*) Solve the following system of equations :

$$X - Y + Z = 0$$

$$X + 2Y - Z = 0$$

$$2X + Y + 3Z = 0$$

(*ii*) What are degrees of freedom ? Determine the number of degrees of freedom of the above system of equations.

(C) Given that $\{u, v, w\}$ is a linearly independent set of vectors in some vector space V, prove that :

(*i*) the set $\{u, v\}$ is linearly independent.

(*ii*) the set $\{u, u + v\}$ is linearly independent.

(*iii*) the set $\{u + v, v + w\}$ is linearly independent.

(D) Consider the following system of equations :

$$-m_1x + y = b_1$$

$$-m_2x + y = b_2$$

(*i*) Prove that if $m_1 \neq m_2$, then the system of equations has exactly one solution. Find the solution.

(*ii*) Suppose that $m_1 = m_2$. Then under what conditions will the system of equations be consistent ?

(E) (*i*) Let v be any vector of length 3. Let $A = (v, 2v, 3v)$ be the 3×3 matrix with columns $v, 2v, 3v$. Prove that A is singular.

(*ii*) Find equation of the line formed at intersections of the two planes :

$$X - 5Y + 3Z = 11 \text{ and } -3X + 2Y - 2Z = -7.$$

निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** के उत्तर दीजिए :

(A) (*i*) दर्शाइए कि किन्हीं दो $n \times n$ मैट्रिक्स A व B हेतु, $tr(AB) = tr(BA)$, जहाँ $tr(A)$, $n \times n$ मैट्रिक्स A के ट्रेस (trace) को व्यक्त करता है।

(*ii*) प्राचल (parameter) λ के सभी मानों हेतु निम्नलिखित मैट्रिक्स की कोटि (rank) ज्ञात कीजिए :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7-\lambda \\ 2 & \lambda & -6 \end{pmatrix}.$$

(B) (*i*) निम्नलिखित समीकरण निकाय (system of equations) को हल कीजिए :

$$X - Y + Z = 0$$

$$X + 2Y - Z = 0$$

$$2X + Y + 3Z = 0$$

(*ii*) स्वातन्त्र्य कोटियाँ (degrees of freedom) क्या होती हैं ? उपर्युक्त समीकरण निकाय की स्वातन्त्र्य कोटियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

(C) यदि यह दिया हुआ है कि $\{u, v, w\}$ किसी सदिश समष्टि (vector space) V में रैखिकतः स्वतन्त्र (linearly independent) सदिशों (vectors) का एक समुच्चय है तो सिद्ध कीजिए कि :

(*i*) समुच्चय $\{u, v\}$ रैखिकतः स्वतन्त्र है।

(*ii*) समुच्चय $\{u, u + v\}$ रैखिकतः स्वतन्त्र है।

(*iii*) समुच्चय $\{u + v, v + w\}$ रैखिकतः स्वतन्त्र है।

(D) निम्नलिखित समीकरण निकाय पर विचार कीजिए :

$$-m_1x + y = b_1$$

$$-m_2x + y = b_2$$

(*i*) दर्शाइए कि यदि $m_1 \neq m_2$, तो समीकरण निकाय का ठीक एक हल है। इस हल को ज्ञात कीजिए।

(*ii*) दर्शाइए कि यदि $m_1 = m_2$ तो किन शर्तों के अधीन यह समीकरण निकाय संगत (consistent) होगा ?

(E) (*i*) मान लीजिए कि v, लम्बाई 3 का कोई सदिश है। मान लीजिए कि $A = (v, 2v, 3v)$ एक 3×3 मैट्रिक्स है जिसके स्तम्भ $v, 2v, 3v$ हैं। सिद्ध कीजिए कि A विलक्षण (singular) है।

(*ii*) समतलों $X - 5Y + 3Z = 11$ व $-3X + 2Y - 2Z = -7$ के प्रतिच्छेदन (intersection) पर निर्मित रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।